

3 素因数分解

<目標>

自然数を手際よく素因数分解することができる。

<注意>

教科書には、「自然数を、それより小さい自然数の積で表すことを考える。また、自然数を1より大きい自然数の積で表すことを考える。」と書かれています。すなわち、1とその数自身で積の形に表すことは考えません。それを前提に進めていきます。

<問題>

72を2つの自然数の積で表しましょう。

$$72 = 2 \times 36 = 3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12$$

と72は4通りの積の形で表すことができます。

<重要>

整数が、いくつかの整数の積の形で表されるとき、その1つ1つの数を、もとの数の因数といいます。

<注意>

自然数ではなく、整数の範囲まで広げて考えると、例えば 12 は

$12 = (-2) \times (-6)$ と表せるので、 -2 、 -6 は12の因数であるとまで考えることになります。しかし、ここで学習する「素因数分解」については、自然数の範囲で考えることとします。

$\{2, 3, 4, 6, 12, 18, 24, 36\}$ は72の因数であるといいます。
(1と72も72の因数)

72を3つの自然数の積の形で表すと、

$$72 = 2 \times 3 \times 12 = 3 \times 4 \times 6 \quad \dots$$

となり、 $\{ \}$ の中にある数のいずれかで表すことになります。

<非常に重要>

72などとは違い、2, 3, 5, 7 などの数は、それより小さい自然数の積の形で表すことができません。このような自然数を **素数** といいます。

ただし、**1 は素数にはふくめません。**

最も小さい素数は 2 となります。

<問題>

10以上30以下の素数を答えなさい。

教科書 P.22 参照

48 を 6×8 と表したとき、因数 6, 8 はそれぞれ $6 = 2 \times 3$ $8 = 2 \times 2 \times 2$ と表すことができます。すなわち、48 は次のように表すことができます。

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

このように、1 と素数以外の自然数は、それを因数の積に直していくと、最後には、素数だけの積に表すことができます。

<重要>

素数である因数を、素因数といい、自然数を素数の積として表すことを、素因数分解といいます。

<お薦めの素因数分解の方法>

120 の素因数分解

よって、

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 120} \\ 3 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 8} \\ 2 \overline{) 4} \\ 2 \end{array}$$

一の位の数に0だから素数5でわる

$2 + 4 = 6$ だから素数3でわる

<重要>

素因数分解は、どのような順序でわっても結果は同じになります。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 120} \\ 2 \overline{) 60} \\ 2 \overline{) 30} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array}$$

<練習問題>

計算ドリル79 を解きなさい。

この方法は、いくつかの数の最大公約数、最小公倍数（分数の加・減法に役に立つ）を求める時に利用できます。

<問題>

60と72の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

$$\begin{array}{r} 3) \ 60 \quad 72 \\ 2) \ 20 \quad 24 \\ 2) \ 10 \quad 12 \\ \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

左のように、2つの数を共通の素因数でわっていきます。

左のように、2つの数をわることができる共通の素因数がなくなったら計算終了です。

最大公約数は、赤数字すべてを掛けあわせた数 $3 \times 2^2 = 12$

最小公倍数は、赤数字と青数字すべてを掛けあわせた数 $3 \times 2^2 \times 5 \times 6 = 360$ となります。

<問題>

30と45と60の最大公約数と最小公倍数を求めなさい。

$$\begin{array}{r} 3) \ 30 \quad 45 \quad 60 \\ 5) \ 10 \quad 15 \quad 20 \\ 2) \ 2 \quad 3 \quad 4 \\ \quad 1 \quad 3 \quad 2 \end{array}$$

3つの数を共通の素因数でわっていきます。

左のように、2, 4は2でわれるので計算を続けます。このとき3はそのまま計算しない状態にします。

最後に、3つの数をわることができる共通の素因数がなくなったら計算終了です。

最大公約数は、赤数字を掛けあわせた数 $3 \times 5 = 15$

最小公倍数は、赤数字と青数字すべてを掛けあわせた数 $3^2 \times 2^2 \times 5 = 180$ となります。

これらの考え方は、分数の加・減法のときに使う「通分」で利用できます。

(この内容は、すでに授業でみなさんにはお伝えしてありますが、ここで必ず覚えてください)

教科書 P.232, 233 参照

<練習問題>

計算ドリル3 を解きなさい。

<練習問題の補足>

計算ドリル79 を解きなさい。

<基本の考え方>

$$a^2 \times b^2 \times c^2 = (a \times b \times c)^2$$

2

⑱

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 144} \\ 3 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 16} \\ 2 \overline{) 8} \\ 2 \overline{) 4} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 144 &= 3^2 \times 2^2 \times 2^2 \\ &= (3 \times 2 \times 2)^2 \\ &= 12^2 \end{aligned}$$

左のように解きます。

「どんな数の2乗になるか」が問題なので、2つずつのまとまりにします。

ただし、「乗法公式その3」に真面目に取り組んだ人は、

$$144 = 12^2$$

とすぐに求める(答える)ことができます。196, 225も同様です。

⑳

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 441} \\ 3 \overline{) 147} \\ 7 \overline{) 49} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 441 &= 3^2 \times 7^2 \\ &= (3 \times 7)^2 \\ &= 21^2 \end{aligned}$$

3

㉒

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 729} \\ 3 \overline{) 243} \\ 3 \overline{) 81} \\ 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 729 &= 3^3 \times 3^3 \\ &= (3 \times 3)^3 \\ &= 9^3 \end{aligned}$$

「どんな数の3乗になるか」が問題なので、3つずつのまとまりにします。