３ 有理数と無理数

＜目標＞

・数の世界に，有理数と無理数があることがわかる。
・有理数，無理数の意味がわかる。

今まで学習してきた数は，すべて分数で表すことができます。分数は当たり前ですが，まずは整数と小数を分数に直すことについて考えます。

整数については，その数を m とすると，分母を １ にすれば分数として表すことができます。

$m=\frac{m}{1}$ のように，$3=\frac{3}{1}$ ，$-5=-\frac{5}{1}$ です。

次に，小数を考えます。**小数には（１）有限小数 と （２）無限小数 の２種類があります。**

たとえば，$\frac{3}{8}$ を小数に表すと，わり切れて ０．３７５ となります。

このような小数を **有限小数** といいます。有限小数を分数に直す考え方は小学校で学習済みです。

＜有限小数を分数に直す考え方＞

$0.3=\frac{3}{10}$ ，$0.31=\frac{31}{100}$ ，$0.234=\frac{234}{1000}=\frac{117}{500}$

のように，小数第一位までの小数ならば分母は10，小数第二位までならば分母は100，・・・としていきます。

ま $\frac{234}{1000}=\frac{117}{500}$ た，　のように，もうこれ以上約分ができない（分母と分子が1以外に共通の約数を持たない）分数を「既約分数」といいます。どのような分数も，既約分数として1通りに表すことができます。

＜説明＞

$\frac{5}{10}=\frac{4}{8}=\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$ の １ 通りに表すことができるということです。

それに対して，$\frac{1}{3}=0.3333\cdots$ ，$\frac{1}{7}=0.14285714\cdots$ のように，わり切れず，限りなく続く小数を **無限小数** といいます。ただし，無限に続く数はある位から先は決まった数がくり返されます。

$\frac{1}{3}=0.333\cdots$ ならば３が，$\frac{1}{7}=0.14285714\cdots$ ならば１４２８５７がくり返し続きます。このような小数を **循環小数** といい，繰り返される小数部分の両端の数字の上に点をつけて表します。

＜循環小数の表し方＞

$0.333\cdots=0.\dot{3}$ ，$0.1212\cdots=0.\dot{1}\dot{2}$ ，$0.14285714\cdots=0.\dot{1}4285\dot{7}$

＜循環小数を分数に直す考え方＞

先生がこれを書いているのは5月13日です。それでは，循環小数$0.\dot{0}51\dot{3}$ を分数に表します。

$\dfrac{57}{1111}$ となります。電卓を使って，57÷1111 を計算してみましょう。

また，リズミカルに勉強をするために，ワン・トゥー・スリー，ワン・トゥー・スリー，・・・0．123とするには

$\dfrac{41}{333}$ となります。同じく電卓で，41÷333　を計算してみましょう。いかがですか？

ちなみに，自分の誕生日を４けたの整数で表した数（１月から９月生まれの人は３けた）を ９９９９ でわってみてください。

（教科書 P.49 参照）

＜重要＞

整数mと，0でない整数nを使って，分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表される数を「有理数」といいます。

$\sqrt{4}$ は，$\sqrt{4}=2$，$\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ は $\sqrt{\dfrac{9}{16}}=\dfrac{3}{4}$ なので有理数です。

＜重要！＞

$\sqrt{2}$ は，$1<\sqrt{2}<2$ だから整数ではありません。また，分数では表すことができません。

（教科書P.234,235参照。学校選択問題を扱う高校を希望する生徒は，必ず見ること）

分数で表すことができない，すなわち有理数でない数を「無理数」といいます。
無理数を小数で表すと，無限小数になりますが，有理数とは違って同じ数がくり返し出てきません。そのような無限小数を「循環しない無限小数」といいいます。
すなわち，無理数を小数で表すと，循環しない無限小数となります。

ちなみに，円周率 π も，無理数であることがわかっています。

＜注意！＞

「根号のついている数がすべて無理数である」は間違い！
「無限小数は無理数である」も間違いです。
そう感じた人は,もう一度このプリントを見直しましょう。

＜練習問題＞

教科書 P.48 の問１，ワーク P.34 を解きなさい。

①

（１）$\sqrt{0.81}=0.9$ より，有理数

（２）$\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$ より，有理数

（３）$-\sqrt{2}$ は無理数

＜循環小数を分数に直す考え方＞の補足

＜ポイント＞

文字を利用して考えます。

$0.\dot{1}\dot{2}$ を分数に直すことを考えます。

$x=0.\dot{1}\dot{2}$ とすると，$100x=12.\dot{1}\dot{2}$ と表すことができる。

$$\begin{array}{rl} & 100x=12.1212\cdots \\ -) & \quad\;\; x=\;\;0.1212\cdots \\ \hline & 99x=12 \end{array}$$

小数点以下の数は，上も下も同じなので，右辺は12になる

$x=\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{33}$ **となり，４÷３３を計算すると，０．１２１２･･･となります。**

$\sqrt{3}$ が無理数であることの証明　**･･･「背理法」という証明の方法は高校で学習します**

$\sqrt{3}=\dfrac{b}{a}$ とする。（$\dfrac{b}{a}$ は既約分数）

両辺を２乗して，変形すると

$3a^2=b^2$

となり， b^2が３の倍数になるので，bも３の倍数である。　･･･①

よって，自然数 c を使って b＝3c と表すと，

$3a^2=b^2$

$3a^2=9c^2$

$a^2=3b^2$

となり，同様に a は3の倍数となる。　･･･②

①，②より，a と b はともに3の倍数となり， $\dfrac{b}{a}$が既約分数ということに矛盾する。

よって，$\sqrt{3}$ は無理数である。

有理数と無理数をあわせると，数直線上に表される数全体になります。